



Selection of mother wavelet for bivariate wavelet analysis

Lee, Jinwook^a · Lee, Hyunwook^b · Yoo, Chulsang^{c*}

^aPh.D Candidate, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, Korea University, Seoul, Korea

^bM.E, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, Korea University, Seoul, Korea

^cProfessor, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, Korea University, Seoul, Korea

Paper number: 19-075

Received: 17 September 2019; Revised: 9 October 2019; Accepted: 9 October 2019

Abstract

This study explores the effect of mother wavelet in the bivariate wavelet analysis. A total of four mother wavelets (Bump, Mexican hat, Morlet, and Paul) which are frequently used in the related studies is selected. These mother wavelets are applied to several bivariate time series like white noise and sine curves with different periods, whose results are then compared and evaluated. Additionally, two real time series such as the arctic oscillation index (AOI) and the southern oscillation index (SOI) are analyzed to check if the results in the analysis of generated time series are consistent with those in the analysis of real time series. The results are summarized as follows. First, the Bump and Morlet mother wavelets are found to provide well-matched results with the theoretical predictions. On the other hand, the Mexican hat and Paul mother wavelets show rather short-periodic and long-periodic fluctuations, respectively. Second, the Mexican hat and Paul mother wavelets show rather high scale intervention, but rather small in the application of the Bump and Morlet mother wavelets. The so-called co-movement can be well detected in the application of Morlet and Paul mother wavelets. Especially, the Morlet mother wavelet clearly shows this characteristic. Based on these findings, it can be concluded that the Morlet mother wavelet can be a soft option in the bivariate wavelet analysis. Finally, the bivariate wavelet analysis of AOI and SOI data shows that their periodic components of about 2-4 years co-move regularly every about 20 years.

Keywords: Wavelet analysis, Mother wavelet, Bivariate analysis, Co-movement

이변량 웨이블릿 분석을 위한 모 웨이블릿 선정

이진욱^a · 이현욱^b · 유철상^{c*}

^a고려대학교 건축사회환경공학과 박사과정, ^b고려대학교 건축사회환경공학과 석사, ^c고려대학교 건축사회환경공학과 교수

요 지

본 연구에서는 이변량 웨이블릿 분석에 있어 모 웨이블릿이 어떤 영향을 미치는지를 파악하였다. 모 웨이블릿으로는 관련 연구에서 많이 사용되고 있는 총 네 가지(Bump, Mexican hat, Morlet, Paul)를 선정하였다. 이들 모 웨이블릿은 먼저 백색잡음과 다양한 주기의 사인곡선을 결합하여 만든 시계열의 이변량 분석에 적용하여 그 결과를 평가하였다. 또한 실제 시계열인 북극진동지수(AOI)와 남방진동지수(SOI)를 이변량 분석하여 모 의된 시계열의 분석 결과가 실제 자료의 분석결과에도 일관되게 유지되는지를 판단하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다. 먼저, Bump와 Morlet 모 웨이블릿의 경우가 이론적인 예측에 보다 잘 부합하는 것으로 나타났으며, 반대로 Mexican hat 모 웨이블릿은 상대적으로 단주기의 변동 특성을, Paul 모 웨이블릿의 경우에는 장주기의 변동 특성을 잘 보여주는 것으로 나타났다. 둘째, Mexican hat과 Paul 모 웨이블릿의 경우에는 스케일 간섭이 매우 크게 나타남을 확인할 수 있었다. Bump와 Morlet 모 웨이블릿에서는 이러한 문제점이 나타나지 않았다. 소위 동조화(co-movement)를 탐색하는 능력은 Morlet와 Paul 모 웨이블릿이 가지고 있는 것으로 파악되었다. 특히, Morlet의 경우 이 특성이 더욱 명확히 나타남을 확인하였다. 결과적으로 Morlet 모 웨이블릿이 이변량 웨이블릿 분석에 가장 무난한 것으로 확인되었다. 마지막으로, AOI와 SOI 자료의 이변량 웨이블릿 분석에서는 대략 2-4년 정도의 주기성분이 약 20년 빈도로 서로 동조하고 있음을 확인할 수 있었다.

핵심용어: 웨이블릿 분석, 모 웨이블릿, 이변량 분석, 동조화

*Corresponding Author. Tel: +82-2-3290-3321
E-mail: envchul@korea.ac.kr (C. Yoo)

1. 서론

시계열 자료는 경향성 및 주기성 등 비정상성 특성을 포함하는 경우가 많다. 이러한 특성은 자기상관도, 스펙트럼 등 다양한 방법으로 분석된다. 특히 스펙트럼 분석은 시계열 자료가 가지는 주기성을 파악하는 경우 사용된다. 잘 알려진 것처럼 스펙트럼 분석은 푸리에 변환(Fourier Transform, FT)에 기초하고 있으며, 이는 시계열 자료를 시간 영역(time domain)으로부터 주파수 영역(frequency domain)으로 변환시키는 역할을 한다. 그러나 스펙트럼에 나타나는 시계열의 특성은 시계열 전체를 대표하는 것으로 더 이상 시간 영역의 정보를 포함할 수 없다는 한계를 갖는다. 이를 보완하기 위한 목적으로 제시된 것이 시간-주파수 분석이다(Smith *et al.*, 1998). 그러나 시간-주파수 분석 또한 고정된 주파수 범위 밖의 성분에 대해서는 해석이 어렵다는 한계가 존재한다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 대안으로 제시된 것이 웨이블릿 분석(wavelet analysis)이다(Misiti *et al.*, 2013; Meyers and Jones, 1993).

웨이블릿 분석은 다양한 학문 분야에서 효과적인 시계열 분석 방법으로 자리 잡았다(Cazelles *et al.*, 2008). 수문학 또는 기상학 분야에서도 많은 사례를 찾아볼 수 있다. 예를 들어, Nakken (1999)은 1911년부터 1996년까지의 호주 Peak Hill 지역의 강수량 자료를 웨이블릿 분석하여 주기성의 변화를 살펴보고 있다. 특히, 1911년부터 1935년 사이에는 4년에서 2.5년 주기의 큰 변화를 확인하였다. Kailas and Narasimha (2000)는 1870년부터 1990년까지의 인도 우기의 연 강수량 자료를 웨이블릿 분석하여 가뭄 또는 홍수가 발생한 해에 10년에서 100년 주기가 뚜렷하게 나타났다는 것을 발견하였다. 아울러 Echer *et al.* (2008)은 1894년부터 1995년까지의 남부 브라질의 연 강수량을 웨이블릿 분석하였으며, 기존의 스펙트럼 분석으로는 발견하지 못한 1915-1920년 및 1930-1945년의 기간 동안 4-6년의 강한 주기 성분을 확인하였다. Labat *et al.* (2005)은 SOI (Southern Oscillation Index) 자료를 웨이블릿 분석하여 1870~1920, 1965~2000년 사이에 2~7년 주기가 잘 나타나고 있다는 것을 확인하기도 하였다. Lee and Yoo (2019)는 북극진동지수(AOI)의 웨이블릿 분석을 통해 특히 17년의 장주기가 80년대에 강하게 나타났었다는 것을 확인하기도 하였다.

웨이블릿 분석은 두 시계열 사이의 관계분석을 위해서도 이용된다. 특히 다른 주기특성의 두 자료가 동조화(co-movement) 되는 시점을 찾는 데 유리하게 이용된다(Reboredo *et al.*, 2017). 이변량 분석에는 다양한 형태의 정보가 이용될 수 있으나, 통상 cross wavelet power (XWP)와 wavelet coherence (WC)가 주로 활용된다. XWP은 시간-주파수 영역에서 두 시계열 사이

의 국지적인(local) 공분산(covariance)을 의미한다고 볼 수 있으며(Rayeezuddin and Reddy, 2015; Kristoufek, 2017), WC는 XWP를 각 신호의 스펙트럼으로 정규화한(normalized) 지표라고 볼 수 있다. 따라서 XWP의 범위에는 제한이 없지만 WC는 0에서 1 사이의 값을 갖는다. 0에 가까울수록 두 시계열 간의 선형적인 관계가 약하며, 1에 가까울수록 두 시계열 간의 선형적인 관계가 강하다는 것을 의미한다(Labat *et al.*, 2005).

웨이블릿 이변량 분석과 관련된 연구는 다양한 분야에서 수행되고 있으며, 수문·기상 분야에서도 많은 사례들을 찾아볼 수 있다. 예를 들어, Labat *et al.* (2005)은 브라질의 네 개 대유역(Amazon, Parana, Orinoco, Congo)의 유량과 SO (Southern Oscillation), NAO (North Atlantic Oscillation) 사이의 Coherence를 분석하여 모든 유역에서 3-6년 정도의 주기성이 나타남을 확인하였다. Schaeffli *et al.* (2007)는 Swiss Alps 지역의 유량과 강수량 사이에는 뚜렷한 주기 특성이 없는 것을 확인하였으며, 그 원인으로 유출에 미치는 강설의 영향이 강하기 때문이라는 점을 언급하였다. Schaeffli *et al.* (2007)는 또한 온도가 매우 짧은 시간 동안의 유량 변화에는 영향을 미치지 않는 것을 발견하였는데, 이를 통해 Alps 지역의 돌발홍수가 용설에 의해 발생하는 것은 아니라는 점을 강조하였다. 이외에도 수문·기상 분야에서는 기후 지표 및 수문 성분들을 활용하여 이변량 웨이블릿 분석을 수행한 다수의 연구들을 찾아볼 수 있다(Ghanbari *et al.*, 2009; Labat, 2010; Schulte *et al.*, 2016).

웨이블릿 분석의 경우 선택할 수 있는 모 웨이블릿(mother wavelet)의 수는 많다. 어떤 모 웨이블릿을 선택하느냐에 따라 웨이블릿 분석 결과는 크게 다를 수 있다(Mojilović *et al.*, 2000; Fu *et al.*, 2003; Wang *et al.*, 2004; Ahuja *et al.*, 2005; Safavian *et al.*, 2005). 결과적으로 시계열의 분석 목적에 따라 적절한 모 웨이블릿의 선택은 매우 중요하다(Farge, 1992). 원 신호와의 유사성을 시각적으로 판단하여 모 웨이블릿을 결정한 사례들도 다수 존재한다(Flanders, 2002; Faisal and Mohamed, 2008; Ahadi and Bakhtiar, 2010; Tang *et al.*, 2010). 이러한 방법은 특히 단변량 시계열 분석에서는 효과적일 수 있는 것으로 나타난다.

그러나 이변량 분석에서는 특성이 다른 두 시계열을 다루고 있으므로 단변량 분석에서와 같은 방식으로 모 웨이블릿을 선정하는 것은 어렵다. 특정 모 웨이블릿을 선정하는 경우 하나의 시계열에는 유효하지만 다른 시계열에는 부적절할 가능성이 있기 때문이다. 결과적으로 이변량 분석에서의 모 웨이블릿 선택은 연구자의 주관에 따라 결정되는 것이 일반적이며, 어떤 명확한 기준이나 일반적으로 통용되는 방법론은 존재하지 않는다(Ryu *et al.*, 2012; Ngui *et al.*, 2013). 대부분의 이변량 웨이블릿 분석에서는 특별한 이유나 근거 없이 Morlet 모

웨이블릿을 사용하고 있는 것이 현실이다(Bolton *et al.*, 1995; Appenzeller *et al.*, 1998; Prokoph and Patterson, 2005).

본 연구의 목적은 이변량 웨이블릿 분석에 있어 모 웨이블릿의 영향을 파악해 보는 것이다. 이를 위해 먼저 기존 연구들에서 사용된 적이 있는 대표적인 모 웨이블릿을 선정하였다. 또한 이들 모 웨이블릿은 백색잡음과 다양한 주기의 사인곡선을 결합하여 만든 시계열의 이변량 분석에 적용하여 그 결과를 평가하였다. 이러한 과정은 그 특성을 알고 있는 시계열의 이변량 웨이블릿 분석 결과가 모 웨이블릿에 따라 어떻게 달라지는지를 확인하기 위함이다. 마지막으로 본 연구에서는 북극진동지수(AOI)와 남방진동지수(SOI)를 이변량 분석하여 모의된 시계열의 분석 결과가 실제 자료의 분석결과에 어떻게 반영되고 있는지를 확인하였다. 이러한 분석 결과를 토대로 본 연구에서는 이변량 웨이블릿 분석을 위해 가장 적절한 모 웨이블릿을 제시해 보고자 한다.

2. 웨이블릿(Wavelet) 분석

2.1 푸리에 변환 및 웨이블릿 변환

시간에 대한 신호를 주파수 영역으로 변환하여 분석하기 위해 통상 푸리에 변환을 많이 사용하여 왔다. 푸리에 변환은 사인 함수 및 코사인 함수를 기저 함수로 사용하기 때문에, 국소적인 변화보다는 전체적인 주기성을 분석하는 경우 유용하게 사용된다. 푸리에 변환을 통해 시계열로 표현되는 신호에 대한 전반적인 특정 주파수를 추출할 수 있으나, 특정 시점에서의 정보를 얻기는 어렵다. 이러한 단점을 극복하기 위해 짧은 시간 단위로 분할한 다음 푸리에 변환을 적용하는 단시간 푸리에 변환(Short-Time Fourier Transform, STFT)이 개발되었다. STFT를 이용하면 기존 푸리에 변환에 비해서는 시간 또는 주파수에 대한 정보를 더욱 자세히 알 수는 있지만, 고정된 크기의 윈도우(window)를 사용함에 따라 시간 분해능과

주파수 분해능 중 하나를 포기할 수밖에 없다.

이러한 한계점을 극복하기 위해 등장한 것이 웨이블릿 변환이다. 웨이블릿 변환은 STFT와는 달리 시간과 주파수에 대한 정보를 모두 잡을 수 있는 방법이라고 할 수 있다. 시간적으로 무한한 삼각함수를 이용하여 시간 도메인을 주파수 도메인으로 변환하는 푸리에 변환과는 다르게, 웨이블릿 변환에서는 유한한 길이의 기저 함수(basis function)를 이용하여 기존의 시계열 자료를 주파수 도메인으로 변환한다. 따라서 푸리에 변환과 달리 웨이블릿 변환에서는 신호의 변화되는 부분을 잘 나타낼 수 있어, 신호의 불연속적인 지점을 식별하는 데에 유용하다. Fig. 1은 일반적인 푸리에 변환, STFT, 그리고 웨이블릿 변환의 차이를 개념적으로 나타낸 것이다.

웨이블릿 변환의 기저 함수를 모 웨이블릿(mother wavelet)이라 하며, 모 웨이블릿의 척도 변환(scaling) 및 전이(transition)를 통해 시간 도메인에 있는 기존 신호를 주파수 영역으로 변환한다. Eq. (1)은 연속 웨이블릿 변환(continuous wavelet transform, CWT)의 기본적인 공식이다. 여기서, ψ 는 모 웨이블릿 함수를 나타내며 위첨자*는 켈레 복소수(complex conjugate)를 의미한다. a 와 b 는 모 웨이블릿 조정을 위한 매개변수를 의미한다. a 는 척도 매개변수(scale parameter)로 모 웨이블릿의 크기를 조정하며, b 는 전이 매개변수(transition parameter)로 모 웨이블릿을 시간축 상의 특정 위치를 이동시킨다. 아울러 $W(a, b)$ 는 a 와 b 를 매개변수로 가지는 연속 웨이블릿 변환을 의미한다. $x(t)$ 는 시간축에 존재하는 입력신호를 의미한다. 웨이블릿은 실수 또는 복소수의 값을 가지기 때문에 크기 비교를 위해 $|W_x(a, b)|^2$ 로 계산되는 wavelet power (WP)가 주로 사용되며, 스펙트럼이 강하게 나타나는 주기를 대략적으로 파악하기 위해 각 스케일별 WP를 평균한 global wavelet power (GWP) 또한 많이 활용된다.

$$W_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

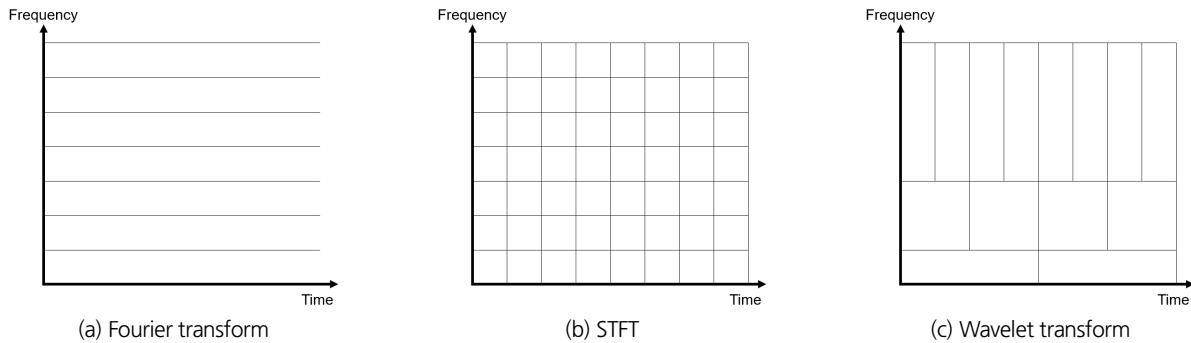


Fig. 1. Conceptual difference between wavelet transform and fourier transform

2.2 이변량 웨이블릿 분석

단변량 분석을 통해서서는 각 신호가 시간-주파수 영역에서 가지는 세기를 알 수 있으나, 두 시계열 간의 간섭 정도나 동시에 발생하는 성질을 정량화할 수 없다. 이로 인해 웨이블릿 분석에서는 두 비정상 시계열의 관계를 정량화하기 위해 두 시계열 스펙트럼의 상관성(correlation)을 활용한다(Chatfield, 1989). 이와 관련된 여러 개의 지표가 존재하지만, 통상 cross wavelet power (XWP)와 wavelet coherence (WC)가 주로 사용된다.

먼저, XWP 산정을 위한 cross wavelet transform (W_{xy})은 Eq. (2)와 같이 정의된다. 여기서 W_x 또는 W_y 는 연속 웨이블릿 변환을 의미하며, 나머지 변수들은 앞서 정의한 것과 같다. $W_{xy}(a, b)$ 의 실수부와 복소부가 만들어내는 복소 편각(complex argument)은 두 시계열의 국부적인 상대 위상(relative phase)를 나타내며, phase angle이라고 불린다. Phase angle은 통상 WC의 결과가 0.5 이상인 경우에 대해서 WC의 결과 위에 화살표로 표현된다(De Boer, 1985). 단변량 웨이블릿 변환에서와 마찬가지로 cross wavelet transform에서도 크기 비교를 위해 $|W_{xy}(a, b)|$ 를 이용하는데, 이를 cross wavelet power (XWP)라고 부른다. XWP는 시간-주파수 영역에서 두 시계열 사이의 국지적인 공분산을 의미한다고 할 수 있다(Rayeezuddin and Reddy, 2015; Kristoufek, 2017).

$$W_{xy}(a, b) = W_x(a, b) W_y(a, b)^* \tag{2}$$

Wavelet coherence (WC)는 XWP를 각 신호의 스펙트럼으로 정규화한 지표라고 볼 수 있다. XWP는 범위를 제한하지 않기 때문에 어떤 특정 값이 너무 큰 경우에는 두 시계열이 동시에 발생하는 중요한 동조화(co-movement)를 놓칠 수 있을 가능성이 있는 반면, WC는 두 시계열의 스펙트럼 모두가 작은 경우에도 이를 포착할 수 있다(Grinsted *et al.*, 2004). 즉, WC는 XWP의 보완적 성격을 가진다. 참고로, 상관계수의 형태를 가지는 함수를 coherency라고 하며, 이를 제곱한 형태는 squared coherency 또는 coherence라고 부른다(Liu, 1994; Torrence and Webster, 1999). WC는 다음 식과 같이 정의된다(Liu, 1994; Torrence and Compo, 1998; Grinsted *et al.*, 2004).

$$R_{xy}^2(a, b) = \frac{|S(s^{-1} W_{xy}(a, b))|^2}{S(s^{-1} |W_x(a, b)|^2) \cdot S(s^{-1} |W_y(a, b)|^2)} \tag{3}$$

여기서 S 는 평활 연산자(smoothing operator)이며, 나머지 기호들은 앞서 정의한 것과 같다. WC는 두 신호가 가지는 시간-주파수 도메인에서의 국부적인 상관도와 유사한 개념으로 볼

수 있으므로, 이를 통해 두 시계열의 동시 발생영역을 대략적으로 파악할 수 있다. WC는 0에서 1 사이의 값을 가지며, 0에 가까울수록 두 시계열 간의 선형적인 관계가 약하며, 1에 가까울수록 두 시계열 간의 선형적인 관계가 강하다는 것을 의미한다(Labat *et al.*, 2005).

2.3 모 웨이블릿의 종류 및 특성

다양한 종류의 모 웨이블릿이 존재하며, 동일한 자료를 분석하더라도 모 웨이블릿의 선택에 따라 그 결과가 확연하게 달라진다(Ngui *et al.*, 2013). 웨이블릿 분석은 이산 웨이블릿 분석과 연속 웨이블릿 분석으로 대별되며, 분석 종류에 따라 주로 사용 가능한 모 웨이블릿 또한 달라진다.

먼저, 이산 웨이블릿 변환(discrete wavelet transform)은 웨이블릿 규모 매개변수를 이산화하여 나타나는 것을 의미한다. 이산 웨이블릿 변환을 위해서 Haar, Daubechies, Gauss 모 웨이블릿 등이 주로 사용된다. 이 중 Haar 모 웨이블릿이 가장 대표적이며, 간단한 함수 형태를 가지고 있어 급격한 변화 혹은 계단 형태의 자료에 사용하면 좋은 결과를 얻을 수 있지만, 부드러운 변화를 나타내는 것은 어렵다. Daubechies 모 웨이블릿은 최근 널리 사용되는 웨이블릿으로 특히 신호가 자기 유사성, 프랙탈 특성, 불연속성 등을 가지고 있는 경우 유리하다고 알려져 있다(Chan and Shen, 2005).

한편, 연속 웨이블릿 변환(continuous wavelet transform)은 규모 매개변수를 보다 미세하게 이산화한 후 모 웨이블릿을 적용하는 방법이다. 연속 웨이블릿 변환을 위해서 Bump, Mexican hat, Morlet, Paul 모 웨이블릿 등이 주로 사용된다. Mexican hat, Paul 모 웨이블릿은 시간 영역에서의 해석에 장점을 가지는 것으로 알려져 있으며, Morlet 모 웨이블릿은 반대로 주파수 영역에서의 해석에 장점을 가지는 것으로 알려져 있다(Baliunas *et al.*, 1997; De Moortel *et al.*, 2004). Bump 웨이블릿은 ψ 형태를 하고 있어 주파수를 국지적으로 분석하는 데에 적합하다고 할 수 있다(Jiang and Suter, 2017).

본 연구에서는 총 네 가지의 모 웨이블릿(Bump, Mexican hat, Morlet, Paul)을 고려하였다. 이들 모 웨이블릿의 선정은 Dyllon and Xiao (2018)의 연구를 참고하였다. Dyllon and Xiao (2018)에서는 웨이블릿 분석을 이용하여 네트워크 데이터 트래픽 자료를 분석하여 시간에 따른 주파수 변화를 살펴보고자 하였다. 그들의 연구는 비록 단변량 시계열에 한정된 연구이기는 하나 특히 모 웨이블릿에 따라 결과가 확연하게 달라짐을 보여주고 있다. 결과적으로 Morlet 모 웨이블릿이 주파수 영역 해석에 가장 뛰어나다는 점을 언급하고 있다. 하지만 이들의 연구는 단변량 웨이블릿 분석에 한정된 결과이므로,

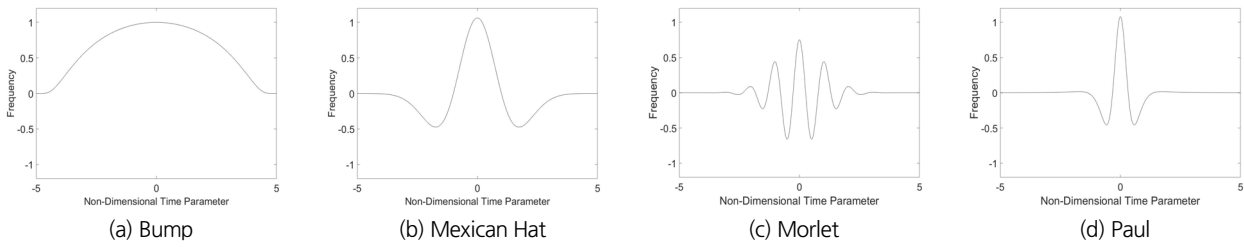


Fig. 2. Shapes of various mother wavelets

이변량 분석에서 어떤 성능을 보일지는 미지수이다.

본 연구에서 고려하는 Bump, Mexican hat, Morlet, Paul 모 웨이블릿은 Eqs. (4)~(7)로 표현된다.

$$\Psi(\eta) = e^{\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{(\eta - \mu)^2}{\sigma^2}}\right)} \quad (4)$$

$$\Psi(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m+1/2)}} \frac{d^m}{d\eta^m} (e^{-\eta^2/2}) \quad (5)$$

$$\Psi(\eta) = \pi^{-1/4} e^{im\eta} e^{-\eta^2/2} \quad (6)$$

$$\Psi(\eta) = \frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m)!}} (1 - i\eta)^{-(m+1)} \quad (7)$$

먼저, Eqs. (4)~(7)에서 η 는 무차원 시간 매개변수(non-dimensional time parameter)를 의미한다(Torrence and Compo, 1998). 아울러 Eq. (4)로 표현되는 Bump 모 웨이블릿에서 μ 와 σ 는 각각 평균과 표준편차를 나타낸다. μ 와 σ 의 유효 범위는 [3, 6], [0.1, 1.2]이며, 기본값(default value)으로 각각 5와 0.6이 사용된다(Kiskin *et al.*, 2018). 다음으로, Eq. (5)는 엄밀히 말해 m -th Order Derivative of Gaussian 웨이블릿을 의미한다. 여기서, m 은 모 웨이블릿을 결정하는 파수(wave number)로 m 에 2가 적용되는 특수한 경우를 Mexican Hat 모 웨이블릿이라 한다. 아울러 Eq. (5)에서 Γ 는 감마 함수(gamma function)이다. Eq. (6)으로 표현되는 Morlet 모 웨이블릿에서 파수 m 으로 6을 사용하는 경우 시간 및 주파수의 지역화(localization)에 있어 최적의 균형을 준다고 알려져 있다(Aguiar-Conraria *et al.*, 2008; Rua, 2010). 마지막으로, Eq. (7)로 표현되는 Paul 모 웨이블릿에서는 파수 m 은 4를 기본값으로 사용한다(Farge, 1992). 본 연구에서는 각 모 웨이블릿의 매개변수로 기본값 또는 통용되는 값들을 적용하였다. 즉, Bump의 경우 μ 와 σ 에 5와 0.6을 적용하고, Mexican hat의 경우 m 에 2를, Morlet의 경우 m 에 6을, Paul의 경우 m 에 4를 적용하였다. 이들 4개의 모 웨이블릿의 형태는 Fig. 2와 같다.

2.4 모 웨이블릿, 시계열 자료 및 웨이블릿 분석 결과에 시의 주파수 관계

웨이블릿은 시간 도메인의 자료를 시간-주파수 또는 시간-스케일의 영역으로 변환하기 때문에 푸리에 변환의 결과 해석처럼 단순하지 않다. 특히, 시간-주파수 영역으로 표현되는 웨이블릿 분석 결과의 해당 주파수가 원자료의 주파수를 의미하는 것은 아니라는 점에 주의할 필요가 있다. 주파수와 역수 관계를 가지는 스케일 또한 마찬가지이다. 이러한 현상이 나타나는 이유는 일정한 주파수를 가지는 삼각함수를 기저함수로 사용하는 푸리에 변환과는 달리, 웨이블릿 분석에서는 기저함수로 사용되는 모 웨이블릿이 가지는 중심 주파수(center frequency)가 모두 다르기 때문이다.

웨이블릿 결과에 대한 정확한 해석을 위해서는 웨이블릿의 시간-주파수 도메인에 나타나는 주파수를 실제 주파수로 변환해 주어야 한다. 변환을 위해 모 웨이블릿이 가지는 중심 주파수가 사용되며, 이렇게 변환되는 주파수를 통상 유사 주파수(pseudo-frequency)라 한다(Dyllon and Xiao, 2018). 만일, 시간-스케일 도메인에 결과를 나타낸다면 이 또한 동일한 원리를 이용하여 푸리에 파장(Fourier wavelength) 또는 등가 푸리에 주기(equivalent Fourier period)로 변환할 수 있다(Torrence and Compo, 1998; Rayeezuddin *et al.*, 2018). 이후의 내용에서는 편의상 해당 용어를 ‘주기(period)’로 표기하였다.

모 웨이블릿의 중심 주파수는 웨이블릿 스펙트럼의 크기를 최대로 만드는 코사인 함수의 주파수를 의미하며, 이는 해석적으로도 유도할 수 있다(Meyers and Jones, 1993; Torrence and Compo, 1998; Zhao *et al.*, 2004). 본 연구에서 고려한 모 웨이블릿에 대해서, 웨이블릿 스케일을 주기로 변환하기 위한 식과 산정된 값은 Table 1과 같다. 이때, 사용된 수식의 매개변수는 모 웨이블릿을 표현하기 위한 Eqs. (4)~(7)에 존재하는 매개변수를 의미한다. 아울러 Table 1에서 s 는 웨이블릿 분석에서의 스케일을 의미하며, λ_s 는 주기를 의미한다. 매개변수 적용 결과 Bump, Mexican Hat, Morlet, Paul 모 웨이블릿은 각각 웨이블릿 스케일에 1.25배, 3.97배, 1.03배, 1.40배를 한 값을 주기로 갖는 것을 알 수 있다. 여기서 흥미로운 점은

Table 1. Wavelet scale and equivalent fourier period

Mother wavelet	Equation for λ_s	λ_s
Bump	$\frac{2\pi s}{\mu}$	1.25s
Mexican Hat	$\frac{2\pi s}{\sqrt{m+1/2}}$	3.97s
Morlet	$\frac{4\pi s}{m + \sqrt{2+m^2}}$	1.03s
Paul	$\frac{4\pi s}{2m+1}$	1.40s

Morlet 모 웨이블릿의 경우 웨이블릿의 스케일과 주기가 거의 동일한 값($\lambda_s = 1.03 s$)을 가진다는 것이다.

추가로, 웨이블릿 분석 결과는 모든 시간 영역에서 완벽하게 지역화될 수는 없기 때문에 COI (Cone of Influence) 개념이 유용하게 사용된다. 간단히 말해, COI는 가장자리 효과(edge effect)가 무시될 수 없는 영역을 의미한다. 이 영역에서는 불확실성이 매우 크기 때문에 결과를 해석할 때는 특별한 주의가 요구된다. 본 연구에서는 Torrence and Compo (1998)을 참고하여 COI를 계산하고, 해당하는 영역을 연한 점선 및 색조로 표시하였다.

3. 대상자료

3.1 모의자료

본 연구에서는 먼저 모 웨이블릿의 영향을 쉽게 판단하기 위해 총 3가지의 시계열을 준비하였다(Fig. 3). 첫째 것은 균일 분포(uniform distribution)를 따르는 난수로 구성된 시계열이다. 상한과 하한은 각각 -3, 3으로 설정하였다(즉, U(-3, 3)). 나머지 두 개는 주기가 다른 사인곡선에 첫 번째 시계열을 더한 시계열이다. 이들 모의 시계열에서 시간 단위 및 자료의 길이는 같다고 가정하였다. 뒤에 살펴볼 실제 시계열이 월 단위

의 자료이므로 모의 시계열의 시간 단위도 월이라 가정하였고, 또한 자료의 길이도 동일하게 672개월(56년)로 하였다. 사인곡선의 주기는 각각 4년과 8년이며 진폭은 10으로 하였다. 본 연구에서의 이변량 분석에 고려한 자료의 조합은 총 세 가지이다. 먼저, Case 1은 사인함수(4년 주기; Sine (4))와 U(-3, 3), 둘째 Case 2는 사인함수(8년 주기; Sine (8))와 U(-3, 3), 마지막으로 Case 3는 사인함수(4년 주기; Sine (4))와 사인함수(8년 주기; Sine (8))의 이변량 분석이다.

3.2 관측자료

3.2.1 북극진동지수(AOI)

북극진동(Arctic Oscillation)은 북극의 공기단의 차가운 소용돌이가 약수십 일에서 수십 년을 주기로 강약을 되풀이하는 현상을 의미한다. 북극진동은 극관(polar cap) 지역과 중위도 지역 사이에 상반되는 지표의 기압 변동이 특징이다. 즉, 극지방에서 해면의 기압이 높게 형성되면 중위도에서는 낮아지고, 반대로 극지방에서 해면의 기압이 낮게 형성되면 중위도에서는 기압이 높게 형성되는 현상이라고 할 수 있다. 이처럼 극지방과 중위도 지역에서의 해면의 기압은 반대의 위상을 가지고 진동하고 있으며, 이러한 현상을 지수화하여 나타낸 것이 북극진동지수(Arctic Oscillation Index, AOI)이다. AOI가 양수인 경우, 북극 상공의 소용돌이의 세력이 강화되는 시기에 제트기류는 북극 근처의 상공에서 올라가미와 같은 역할을 하며 북극의 냉기류를 극지방 근처에 가두어 둔다. 반대로 AOI가 음의 수치를 보이면 북극의 냉기류를 잡아두는 북극 상공의 소용돌이의 세력이 약해지며 북극의 차가운 기류가 북반구 전반에 남하하게 된다. 본 연구에서는 Thompson and Wallace (1998)의 정의를 토대로 AOI를 분석하여 관리하는 NCEP (2019)의 자료 중 1961년부터 2016년까지의 월 단위 AOI를 수집하여 이용하였다. Fig. 4(a)는 본 연구에서 사용한 월 단위 AOI의 시계열 그림을 나타낸다.

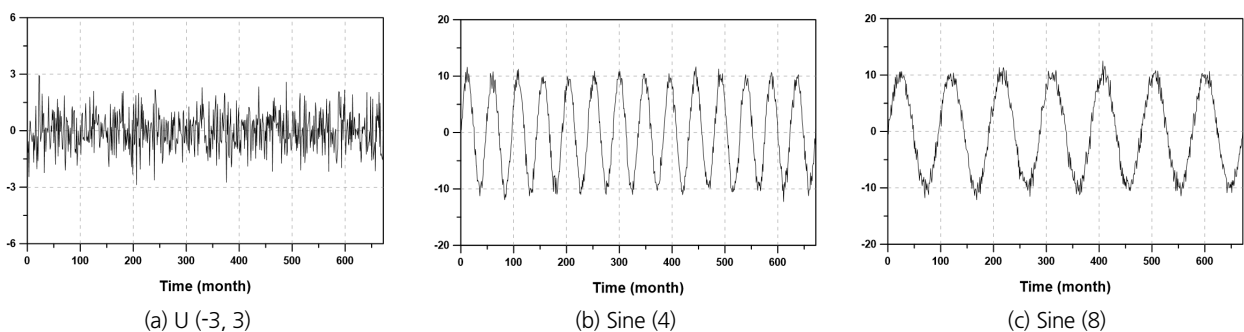


Fig. 3. Simulated time series data used for analysis

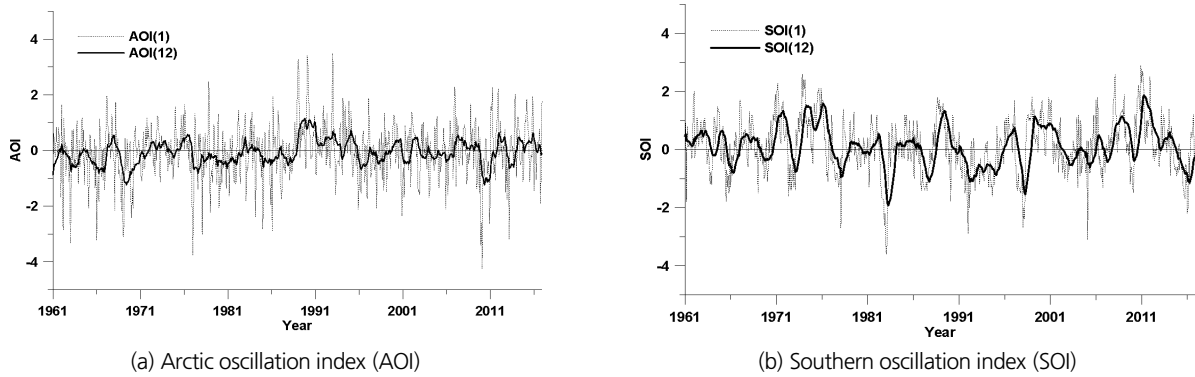


Fig. 4. Time series of monthly data (AOI (1) and SOI (1)) and its 12 month moving average (AOI (12) and SOI (12))

3.2.2 남방진동지수(SOI)

남방진동(Southern Oscillation, SO)이라는 개념은 Walker (1932)에 의해 최초로 도입되었다. Walker (1932)는 열대 태평양의 동부와 서부의 해면기압차가 주기적으로 증가하고 감소하는 것을 확인하였으며 이를 SO라 정의하였다. SO를 정량화하여 만든 지수들은 다양하다. 그중 대표적인 지수로 남방진동지수 SOI (Southern Oscillation Index)와 엘니뇨/남방진동지수(ENSO)를 들 수 있다. 먼저 SOI 지수는 월별로 표준화된 타히티의 기압에서 다윈의 기압을 뺀 것이다(Troup, 1965). ENSO 지수는 SOI 지수와 적도 태평양의 표면수온 (Sea Surface Temperature, SST)을 결합하여 만든 지수이다 (Ropelewski and Halpert, 1986). 이외에도 OLR (Outgoing Longwave Radiation), ONI (Oceanic Nino Index) 등 다양한 지수가 있다. 본 연구에서는 1961년부터 2016년까지의 월 단위 SOI 자료를 미국 상무부 산하 NOAA에서 관리하는 NCEI (2019)에서 수집하였다. Fig. 4(b)는 SOI 월 단위 자료를 나타낸 그림이다.

4. 분석결과

4.1 모의자료에 대한 모 웨이블릿의 영향 평가

4.1.1 Case 1: Sine (4) vs. U (-3, 3)

먼저 U (-3, 3)의 경우 명확한 주기특성이 존재하지 않으며, Sine (4)의 경우 완벽한 주기특성이 존재한다. 따라서 U (-3, 3)의 연속 웨이블릿 변환(CWT) 결과는 어떤 뚜렷한 특성이 불규칙한 특성을 보일 것이다. 이에 반해 Sine (4)의 CWT는 4년의 주기에 해당하는 부분에서 매우 강한 신호가 나타날 것이다. 결국 이 두 자료에 대한 XWP는 각 시계열의 CWT 결과를 곱한 형태로 나타나게 된다. 결과적으로 보면 4년 주기가 상당히 약화되고 또한 불규칙적으로 나타나는 것이 정상이

다. 한편, Sine (4)의 주기인 4년을 Bump, Mexican hat, Morlet, Paul 모 웨이블릿의 스케일로 변환하면 각각 3.2년, 1.0년, 3.9년, 2.9년이 된다. 즉, 4년이 아니라 새로 계산된 스케일에 주기성이 나타나게 된다.

Sine (4)와 U (-3, 3)의 XWT 결과는 Fig. 5와 같다. XWP의 범위는 어떤 모 웨이블릿을 사용하였느냐에 따라 달라지지만, 스펙트럼 내 상대적 크기 비교를 용이하게 하기 위해 최댓값을 짙은 붉은색, 0이 되는 부분을 짙은 파란색으로 표시하였다. 이 그림에서 살펴볼 수 있듯이 모든 경우에 적절한 주기성이 반영되어 있는 것을 확인할 수 있다. 그러나 그 형태는 각각 다르다. 먼저, Bump와 Morlet 모 웨이블릿의 경우는 이론적인 예측에 잘 부합하는 결과를 보여준다. 주기성이 중앙 부분에서 더욱 강하게 나타나는 것은 경계효과로 인해 자료의 양쪽 끝 부분의 주기성이 약화되었기 때문이다. Mexican hat과 Paul 모 웨이블릿의 경우도 모 웨이블릿의 특성이 잘 반영된 결과를 보여주고 있다. 단지 모 웨이블릿의 형태 상 Mexican hat은 상대적으로 단 주기의 Paul의 경우는 장주기의 변동특성을 보여주는 것이다.

Mexican hat과 Paul 모 웨이블릿의 경우에 스케일 간섭이 매우 크게 나타난다는 점도 주목할 만하다. 이에 반해 Bump 모 웨이블릿의 경우는 스케일 간섭이 거의 없는 결과를 보여준다. 모 웨이블릿에 따라 스케일 간섭이 얼마나 다른지는 Wavelet Coherence (WC)에서 잘 확인할 수 있다(Fig. 6). WC는 앞서 설명한 바와 같이 0에서 1 사이의 값을 가지며, 그림에서 짙은 파란색이 0을 의미하며, 짙은 붉은색이 1을 의미한다. 따라서 파란색에 가까울수록 두 시계열 간의 선형적인 관계가 약하며, 붉은색에 가까울수록 두 시계열 간의 선형적인 관계가 강하다는 것을 의미한다. 고려한 네 가지 모 웨이블릿의 경우 모두에 있어 앞서 XWP에 나타난 결과가 확대되어 명확히 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 스케일 간섭의 규모는 Bump의 경우가 가장 작고, Paul의 경우가 가장 크다.

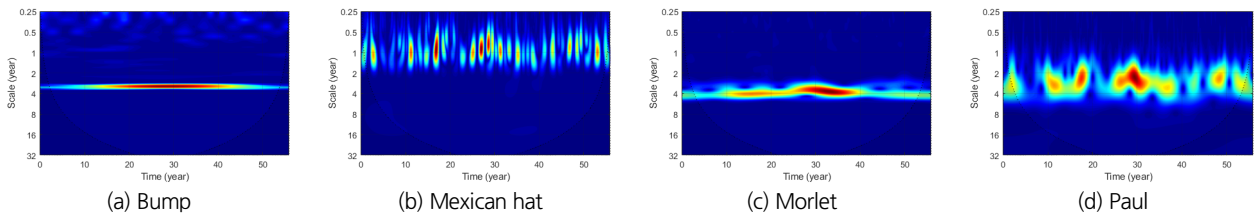


Fig. 5. Comparison of XWP from simulated data (Case 1: U (-3,3) vs. Sine (4))

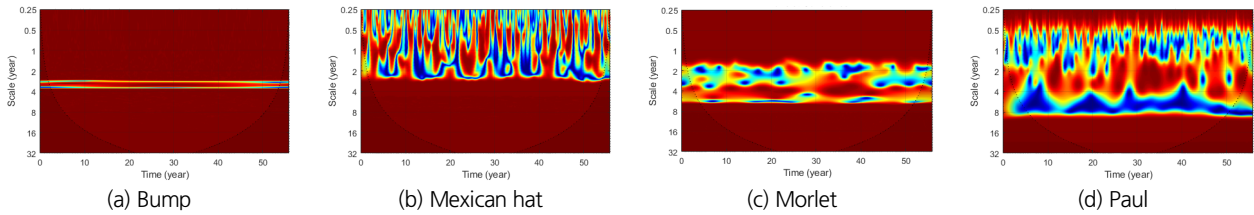


Fig. 6. Comparison of WC from simulated data (Case 1: U (-3,3) vs. Sine (4))

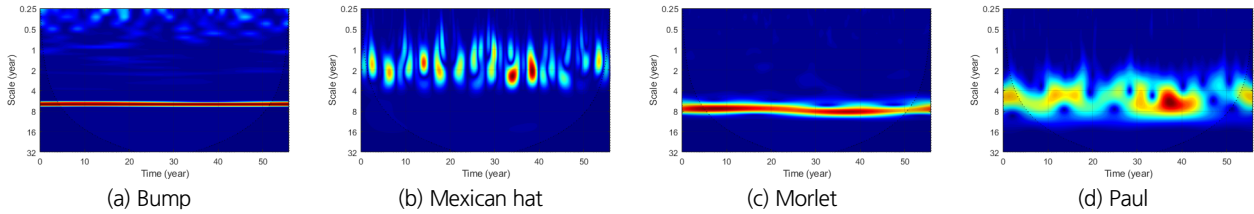


Fig. 7. Comparison of XWP from simulated data (Case 2: U (-3,3) vs. Sine (8))

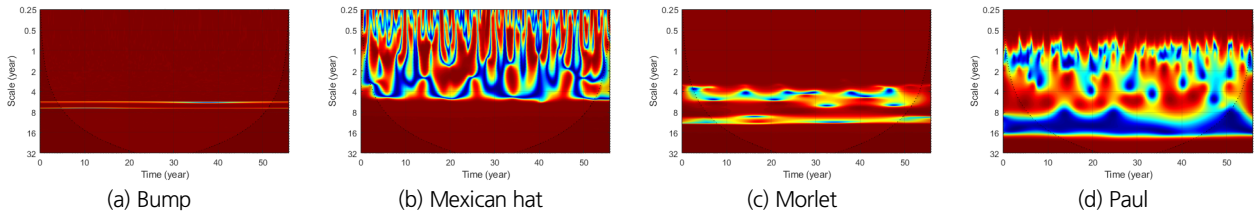


Fig. 8. Comparison of WC from simulated data (Case 2: U (-3,3) vs. Sine (8))

4.1.2 Case 2: Sine (8) vs. U (-3, 3)

Sine(8)은 Sine(4)와 주기만 다른 시계열이므로, Case 2의 XWT, WC 결과는 Case 1과 매우 유사하다(Figs. 7 and 8). 둘 사이의 가장 큰 차이는 사인함수의 주기가 길어짐에 따라 이에 비례하여 스케일 간섭 영역이 커졌다는 점이다. Mexican hat, Paul 모 웨이블릿의 경우 스케일 간섭 영역이 각각 스케일 3년에서 스케일 6년으로, 스케일 8년에서 스케일 16년까지로 두 배 확대되었다. 그러나 Bump, Morlet 모 웨이블릿의 경우는 크게 변함이 없다. 즉, 스케일 간섭의 정도가 사인함수의 주기에 영향을 받지 않는 것으로 나타났다. 이러한 특성은 특히 장주기 성분이 분석 대상 시계열에 포함되어 있는 경우에 어떤 모 웨이블릿을 선택하는 것이 유리한지를 나타내 준다. 스케일 간섭이 심한 모 웨이블릿을 선택할 경우 그 해석이 매우 모호해 질 수 있다.

4.1.3 Case 3: Sine (4) vs. Sine (8)

주기성이 명확한 Sine (4)와 Sine (8)의 이변량 분석 결과는 쉽게 예측할 수 있다. 기본적으로 이들 두 자료는 4년 주기마다 같은 값을 공유하게 된다. 그러나 두 함수의 공통 주기는 8년이 되므로 이 주기에서도 역시 주목할 만한 특성이 나타날 것이다. 추가로, 앞의 두 경우와 비교하여 생각할 수 있는 또 다른 중요한 특성은 자료 구조에 있다. 앞의 두 경우는 백색잡음과의 이변량 분석이었으므로 사인함수의 특성이 크게 반영되어 나타날 수밖에 없다. 즉, 어떤 특정 시점에서 다른 주기 특성을 보이는 것은 불가능하다. 그러나 Case 3의 경우에는 2개의 사인함수를 분석하는 것이므로 자료 구조상 특정 시점에서(또는, 특정 주기를 갖고; 물론, 이 주기는 4년 또는 8년이다) 2개 자료가 같은(또는 유사한) 값을 보이는 현상이 발생하는 것이다. Case 3의 XWP에서는 이러한 특성을 중요하게 살펴보아야 한다. 참

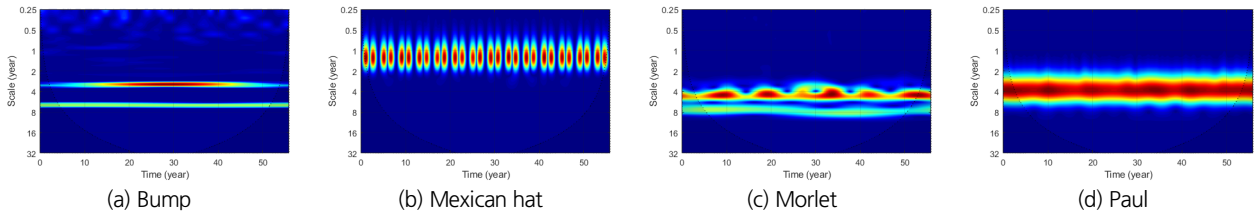


Fig. 9. Comparison of XWP from simulated data (Case 3: Sine (4) vs. Sine (8))

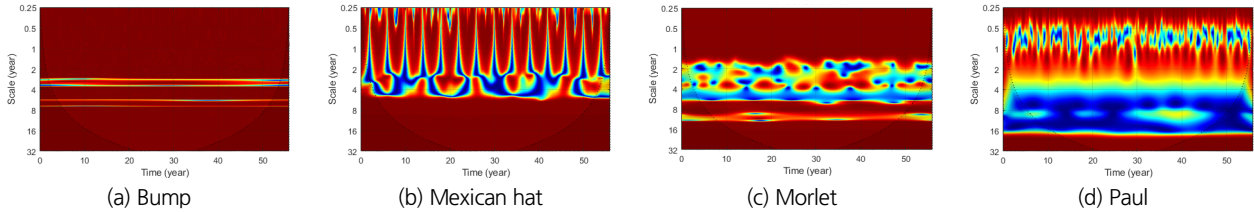


Fig. 10. Comparison of WC from simulated data (Case 3: Sine (4) vs. Sine (8))

고로, Sine (4)의 주기는 Bump, Mexican hat, Morlet, Paul 모 웨이블릿의 스케일로 변환하면 약 3.2년, 1.0년, 3.9년, 2.9년이 되고, Sine (8)의 주기는 약 6.4년, 2.0년, 7.8년, 5.7년이 된다.

Sine (4)와 Sine (8)의 XWP는 Fig. 9와 같다. 먼저, Bump 모 웨이블릿의 적용 결과에는 주기 4년이 강하게 주기 8년은 약하게 나타나 있다. 이는 Morlet의 경우에서도 마찬가지이다. Mexican hat의 경우에는 두 주기가 섞여 나타나 있고, 역시 단변량 분석에서와 같이 모 웨이블릿의 단주기 특성이 크게 반영되어 있다. Paul의 경우에도 두 주기가 섞여 나타나나 장 주기의 특성이 나타난다. 추가로 살펴보아야 하는 것이 4년 또는 8년의 주기를 갖는 주기성분의 발현 여부이다. 이는 동조화(co-movement)가 적절히 탐색되느냐의 문제이다. Fig. 9에서 이 모습을 살펴볼 수 있는 것은 Morlet와 Paul 모 웨이블릿을 적용한 경우에 한정된다. Morlet의 경우 이 특성이 더욱 명확히 나타난다. 이 두 경우에 주기 8년 정도로 두 시계열의 동조화가 명확히 반복되고 있다.

이러한 특성은 WC에서 더욱 명확히 살펴볼 수 있다(Fig. 10). 공교롭게도 예상되는 결과가 나타나는 것은 Morlet 모 웨이블릿을 적용한 경우뿐이다. 특히 XWP에서 살펴보기 어려웠던 4년 정도의 간격을 가지고 주기성분이 발현되고 있음을 확인할 수 있다. 이와 반대로 Paul 모 웨이블릿을 적용한 WC는 XWP와는 전혀 다른 모습을 보여준다. 스케일 간의 간섭으로 인해 그 어떤 특징도 파악하기 쉽지 않다.

본 연구에서는 주기가 바뀌는 시계열에 대해 추가적으로 검토해보았다. 즉, 진폭은 다르지만 주기가 8년에서 4년으로 바뀌는 두 개의 시계열을 고려하여 모 웨이블릿에 따른 XWP와 WC의 결과를 살펴보았다. 전반적으로 확인할 수 있는 모 웨이블릿의 특징들은 Case (3)과 유사했다. 먼저, Bump 모 웨

이블릿의 경우 XWP와 WC에서 두 시계의 주기를 명확하게 구분하기는 하나, WC에서 시계열의 주기가 변하는 시점을 파악하기 어려웠으며, Mexican hat과 Paul 모 웨이블릿의 경우에는 XWP를 통해 주기가 변하는 시점을 대략적으로 파악할 수는 있지만 WC가 매우 넓은 주기에 걸쳐 나타나는 것으로 확인되었다. 오직 Morlet 모 웨이블릿만이 XWP와 WC가 유사한 경향을 보여주며 두 시계열 스펙트럼의 증폭 및 공조를 잘 표현하고 있는 것을 확인할 수 있었다.

4.2 AOI vs. SOI

AOI와 SOI에 대한 XWP 결과는 Fig. 11과 같다. 먼저, Bump 모 웨이블릿을 적용한 경우의 XWP는 2-3년 정도의 스케일(주기 2.5-3.8년)에서 미세한 강세가 간헐적으로 나타난다. 1년 이하의 매우 국부적인 스케일 영역에서 몇 가지 신호들이 있기는 하나, AOI의 특성이 반영된 결과로 이해된다. Morlet 모 웨이블릿을 적용한 경우에서도 약 2-4년 정도의 주기 성분이 약 20년 정도의 빈도로 반복되는 것을 확인할 수 있다. 추가로, Morlet 모 웨이블릿을 적용한 경우에는 약 16년 주기에서 강한 XWP를 보여준다. 이 특징은 1990년 이후 주기가 짧아져 약 10년 정도의 주기로 바뀌어 나타난다. Mexican hat이나 Paul의 경우에서도 주기 2-4년(각각 스케일이 다르게 나타남에 주의)이 약 20년 정도의 빈도로 반복되는 것은 유사하다. 그러나 Morlet의 경우에서 확인된 약 16년 정도의 주기는 Mexican hat의 경우나 Paul의 경우에는 명확하게 나타나지 않는다. 전체적으로 보면 주기 2-4년 성분이 매 20년마다 교차하는 것이 이 두 시계열의 이변량 웨이블릿 분석에서 얻을 수 있는 가장 큰 특징이라고 판단할 수 있다.

이 두 시계열에 대해 유도한 WC의 경우도 XWP의 분석 결

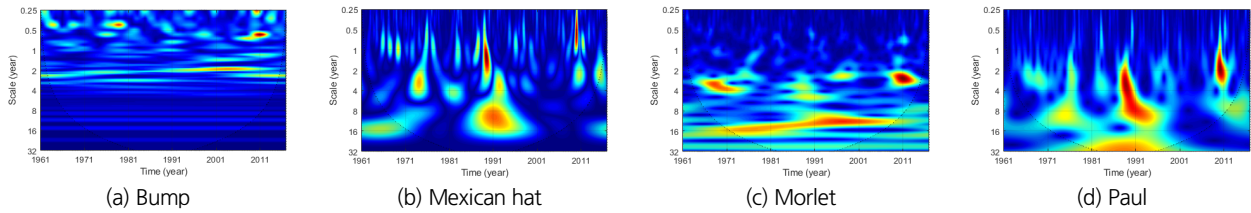


Fig. 11. Comparison of XWP from AOI and SOI

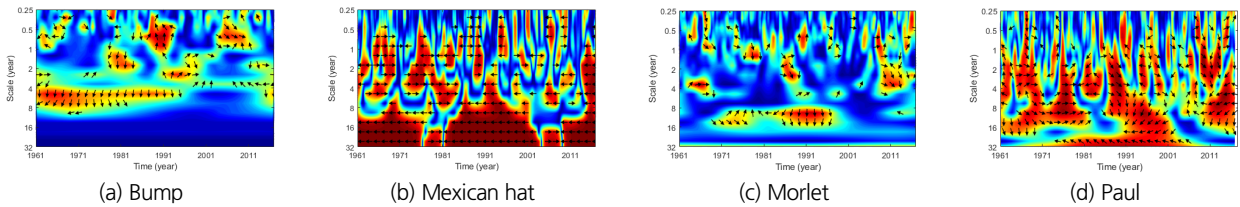


Fig. 12. Comparison of WC from AOI and SOI

과와 유사하다(Fig. 12). AOI와 SOI의 WC 결과에는 phase angle 또한 함께 표시하였다. 대체적으로 보면 짧은 스케일에서는 SOI가 선행하며, 긴 스케일에서는 AOI가 선행하는 경향이 있음을 확인할 수 있다. 사실 두 시계열의 WC는 XWP의 경우보다 더 결과 해석이 어려움이 존재할 수도 있다는 문제가 있다. 이는 두 시계열의 분석결과 상대적으로 우월한 주기성분이 없어 나머지 약한 주기성분에도 모두 큰 값이 대응되었기 때문이다. 결과적으로 XWP 및 WC가 상호 보완적으로 사용될 때 보다 세밀한 분석이 가능함을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 이변량 웨이블릿 분석에 있어 모 웨이블릿이 어떤 영향을 미치는지를 파악해 보았다. 모 웨이블릿으로는 기존 Dyllon and Xiao (2018)의 연구를 참고하여 관련 연구에서 많이 사용되고 있는 총 4개(Bump, Mexican hat, Morlet, Paul)를 선정하였다. 이러한 모 웨이블릿을 먼저 백색잡음과 다양한 주기의 사인곡선을 결합하여 만든 시계열의 이변량 분석에 적용하여 그 결과를 평가하였다. 또한 실제 시계열인 북극진동지수(AOI)와 남방진동지수(SOI)를 이변량 분석하여 모의된 시계열의 분석 결과가 실제 자료의 분석결과에도 일관되게 유지되는지를 판단하였다. 이러한 분석 결과를 토대로 본 연구에서는 이변량 웨이블릿 분석을 위해 가장 무난한 모 웨이블릿을 제시하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1) 모의 시계열의 분석에서는 고려한 모 웨이블릿의 경우에 모두 시계열의 주기성이 적절히 반영되어 있는 것을 확인할 수 있었

다. 그러나 상대적으로 Bump와 Morlet 모 웨이블릿의 경우가 이론적인 예측에 보다 잘 부합하는 것으로 나타났으며, 반대로 Mexican hat은 상대적으로 단주기의 변동특성을, Paul의 경우에는 장주기의 변동특성을 잘 보여주는 것으로 나타났다. 이러한 차이는 물론 모 웨이블릿의 형태를 반영한 결과이다.

2) Mexican hat과 Paul 모 웨이블릿의 경우에는 스케일 간섭이 매우 크게 나타남을 확인할 수 있었다. 그 결과로 특정 스케일이 아닌 전후 스케일을 포괄한 큰 영역에서 강한 XWP를 보이는 결과를 가져온다. 또한 이러한 문제점은 시계열에 장주기성분이 포함되어 있는 경우에 더욱 심해 매우 긴 상관거리를 갖는 시계열의 분석에 불리하게 작용할 것임을 판단할 수 있었다. 이러한 문제점은 WC에서도 잘 확인되었다. Bump와 Morlet 모 웨이블릿에서는 이러한 문제점이 나타나지 않았다.

3) 주기가 다른 두 시계열의 분석에서 이들의 공통주기에 따라 자료가 반복되는 소위 동조화(co-movement)를 탐색하는 능력은 Morlet과 Paul 모 웨이블릿이 가지고 있는 것으로 파악되었다. 특히, Morlet의 경우가 특성이 더욱 명확히 나타남을 확인하였다.

4) AOI와 SOI 자료의 이변량 웨이블릿 분석에서는 모의자료의 분석에서와 같은 뚜렷한 특성을 발견하지는 못하였다. 그러나 대략 2-4년 정도의 주기성분이 약 20년 빈도로 서로 동조하고 있음은 확인할 수 있었다. 즉, 두 시계열이 서로 같은 방향성을 갖는 경우는 매 20년에 1회 정도로 나타난다.

5) 이상의 결과를 바탕으로 본 연구의 결론을 정리하면 다음과 같다. 이변량 웨이블릿 분석에서 모 웨이블릿의 영향은 동일한 시계열에 대해 완전히 다른 결과를 가져다줄 정도로 크다. 만일 하나를 선택한다면 Morlet 모 웨이블릿이 최선책이라 판단된다. 모의 및 실제 자료 분석 결과, 스케일

간섭도 적고, 또한 두 시계열 사이의 동조화도 잘 포착하는 것으로 나타난다. 참고로, 실제 많은 연구들에서 Morlet 모 웨이블릿이 적용되고 있다. 둘째, WC는 보조적인 목적으로 활용하는 것이 필요하다. 먼저 XWP 결과를 해석하고 이를 보완하는 목적으로 WC를 활용하는 것이 유리하다. 셋째, 특히 비선형 시계열의 경우는 많은 다양한 장주기 성분을 포함하고 있어 웨이블릿 분석을 통해서도 아주 뚜렷하게 의미 있는 특징을 찾아낸다는 것이 쉽지 않다. 사전 분석을 통해 예상하는 결과가 있다면 이를 반영할 수 있는 모 웨이블릿을 선택하는 것이 필요하다.

본 연구의 결과는 제한된 시계열의 분석을 통해 얻어진 것이라는 한계를 기억할 필요가 있다. 특히 분석 목적에 따라 선택된 모 웨이블릿이 최선의 선택인지는 반드시 판단해보아야 한다. 아울러 모 웨이블릿에 적용되는 매개변수 또한 자료의 형태에 따라 최적의 값이 달라질 수 있으므로 이에 대한 고려도 충분히 할 필요가 있다. 뿐만 아니라 다른 특성을 가진 자료를 고려하는 경우 본 연구에서 고려하지 않은 모 웨이블릿이 더욱 좋은 결과를 가져다 줄 가능성 또한 존재한다. 이와 관련된 심층적인 분석은 향후 연구에서 고려해 볼 만한 가치가 있다고 생각된다.

감사의 글

본 연구는 환경부/한국환경산업기술원의 지원으로 수행되었음(과제번호 83079).

References

- Aguiar-Conraria, L., Azevedo, N., and Soares, M. J. (2008). "Using wavelets to decompose the time-frequency effects of monetary policy." *Physica A: Statistical mechanics and its Applications*, Vol. 387, No. 12, pp. 2863-2878.
- Ahadi, M., and Bakhtiar, M. S. (2010). "Leak detection in water-filled plastic pipes through the application of tuned wavelet transforms to acoustic emission signals." *Applied Acoustics*, Vol. 71, No. 7, pp. 634-639.
- Ahuja, N., Lertrattanapanich, S., and Bose, N. K. (2005). "Properties determining choice of mother wavelet." *IEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing*, Vol. 152, No. 5, pp. 659-664.
- Appenzeller, C., Stocker, T. F., and Anklin, M. (1998). "North Atlantic Oscillation dynamics recorded in Greenland ice cores." *Science*, Vol. 282, No. 5388, pp. 446-449.
- Baliunas, S., Frick, P., Sokoloff, D., and Soon, W. (1997). "Time scales and trends in the central England temperature data (1659-1990): A wavelet analysis." *Geophysical Research Letters*, Vol. 24, No. 11, pp. 1351-1354.
- Bolton, E. W., Maasch, K. A., and Lilly, J. M. (1995). "A wavelet analysis of Plio-Pleistocene climate indicators: A new view of periodicity evolution." *Geophysical Research Letters*, Vol. 22, No. 20, pp. 2753-2756.
- Cazelles, B., Chavez, M., Berteaux, D., Ménard, F., Vik, J. O., Jenouvrier, S., and Stenseth, N. C. (2008). "Wavelet analysis of ecological time series." *Oecologia*, Vol. 156, No. 2, pp. 287-304.
- Chan, T. F., and Shen, J. J. (2005). *Image processing and analysis: variational, PDE. Wavelet, and Stochastic Methods*, SIAM, Philadelphia, P.A.
- Chatfield, J. R. (1989). *The analysis of time series: an introduction*. Chapman and Hall, London, U.K.
- De Boer, R. W. (1985). *Beat-to-beat blood-Pressure Fluctuations and Heart-Rate Variability in Man: Physiological Relationships, Analysis Techniques and a Simple Model*. Ph. D. dissertation, University of Amsterdam, Amsterdam, Netherlands.
- De Moortel, I., Munday, S. A., and Hood, A. W. (2004). "Wavelet analysis: the effect of varying basic wavelet parameters." *Solar Physics*, Vol. 222, No. 2, pp. 203-228.
- Dyllon, S., and Xiao, P. (2018). "Wavelet transform for educational network data traffic analysis." *Wavelet Theory and Its Applications*, Edited by Radhakrishnan, S., *Intechopen*, London, U.K., pp. 155-172.
- Echer, M. S., Echer, E., Nordemann, D. J., Rigozo, N. R., and Prestes, A. (2008). "Wavelet analysis of a centennial (1895-1994) southern Brazil rainfall series (Pelotas, 31 46' 19 " S 52 20' 33 " W)." *Climatic Change*, Vol. 87, No. 3-4, pp. 489-497.
- Faisal, M. F., and Mohamed, A. (2008). "Comparing the performance of various mother wavelet functions in detecting actual 3-phase voltage sags." *2008 IEEE 2nd International Power and Energy Conference*, IEEE, Johor Bahru, Malaysia, pp. 657-661.
- Farge, M. (1992). "Wavelet transforms and their applications to turbulence." *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 24, No. 1, pp. 395-458.
- Flanders, M. (2002). "Choosing a wavelet for single-trial EMG." *Journal of Neuroscience Methods*, Vol. 116, No. 2, pp. 165-177.
- Fu, S., Muralikrishnan, B., and Raja, J. (2003). "Engineering surface analysis with different wavelet bases." *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 125, No. 4, pp. 844-852.
- Ghanbari, R. N., Bravo, H. R., Magnuson, J. J., Hyzer, W. G., and Benson, B. J. (2009). "Coherence between lake ice cover, local climate and teleconnections (Lake Mendota, Wisconsin)." *Journal of Hydrology*, Vol. 374, No. 3-4, pp. 282-293.
- Grinsted, A., Moore, J. C., and Jevrejeva, S. (2004). "Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series." *Nonlinear Processes in Geophysics*, Vol. 11, No. 5-6, pp. 561-566.
- Jiang, Q., and Suter, B. W. (2017). "Instantaneous frequency estimation based on synchrosqueezing wavelet transform." *Signal Processing*, Vol. 138, pp. 167-181.
- Kailas, S. V., and Narasimha, R. (2000). "Quasi-cycles in monsoon rainfall by wavelet analysis." *Current Science*, Vol. 78, No. 5, pp. 592-595.

- Kiskin, I., Zilli, D., Li, Y., Sinka, M., Willis, K., and Roberts, S. (2018). "Bioacoustic detection with wavelet-conditioned convolutional neural networks." *Neural Computing and Applications*, pp. 1-13.
- Kristoufek, L. (2017). "Has global warming modified the relationship between sunspot numbers and global temperatures?." *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 468, pp. 351-358.
- Labat, D. (2010). "Cross wavelet analyses of annual continental freshwater discharge and selected climate indices." *Journal of Hydrology*, Vol. 385, No. 1-4, pp. 269-278.
- Labat, D., Ronchail, J., and Guyot, J. L. (2005). "Recent advances in wavelet analyses: Part 2-Amazon, Parana, Orinoco and Congo discharges time scale variability." *Journal of Hydrology*, Vol. 314, No. 1-4, pp. 289-311.
- Lee, H., and Yoo, C. (2019). "Evaluation of arctic oscillation effect on monsoons and typhoons in Korea using bivariate wavelet analysis." *Journal of the Korean Society of Hazard Mitigation*, Vol. 19, No. 1, pp. 71-84.
- Liu, P. C. (1994). "Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves." *Wavelet in Geophysics*, Edited by E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, Vol. 4, Academic Press, San Diego, C.A., pp. 151-166.
- Meyers, C., and Jones, T. B. (1993). *Promoting active learning. Strategies for the college classroom*. Jossey-Bass, San Francisco, C.A.
- Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., and Poggi, J. M. (2013). *Wavelets and their Applications*, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- Mojsilović, A., Popovic, M. V., and Rackov, D. M. (2000). "On the selection of an optimal wavelet basis for texture characterization." *IEEE Transactions on image processing*, Vol. 9, No. 12, pp. 2043-2050.
- Nakken, M. (1999). "Wavelet analysis of rainfall-runoff variability isolating climatic from anthropogenic patterns." *Environmental Modelling & Software*, Vol. 14, No. 4, pp. 283-295.
- National Center for Environmental Information (NCEI) (2019). United States, accessed 1 July 2019, <<https://www.ncdc.noaa.gov>>.
- National Center for Environmental Prediction (NCEP) (2019). United States, accessed 1 July 2019, <<http://www.ncep.noaa.gov>>.
- Ngui, W. K., Leong, M. S., Hee, L. M., and Abdelrhman, A. M. (2013). "Wavelet analysis: mother wavelet selection methods." *Applied mechanics and materials*, Vol. 393, pp. 953-958.
- Prokoph, A., and Patterson, R. T. (2005). "From depth scale to time scale: transforming sediment image color data into a high-resolution time series." *Image Analysis, Sediments and Paleoenvironments*, Edited by Francus, P., Springer, Dordrecht, Netherlands, pp. 143-164.
- Rayeezuddin, M. D., and Reddy, B. K. (2015). "A new continuous wavelet family and its application to analysis of elementary periodic signals." *International Journal of Science and Research*, Vol. 4, No. 10, pp. 620-623.
- Rayeezuddin, M. D., Narsimulu, G., and Reddy, B. K. (2018). "On comparison of some properties of proposed continuous wavelets with existing one." *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 118, No. 1, pp. 87-94.
- Reboredo, J. C., Rivera-Castro, M. A., and Ugolini, A. (2017). "Wavelet-based test of co-movement and causality between oil and renewable energy stock prices." *Energy Economics*, Vol. 61, pp. 241-252.
- Ropelewski, C. F., and Halpert, M. S. (1986). "North American precipitation and temperature patterns associated with the El Nino/Southern Oscillation (ENSO)." *Monthly Weather Review*, Vol. 114, No. 12, pp. 2352-2362.
- Rua, A. (2010). "Measuring comovement in the time-frequency space." *Journal of Macroeconomics*, Vol. 32, No. 2, pp. 685-691.
- Ryu, Y., Shin, J. Y., Nam, W., and Heo, J. H. (2012). "Forecast of the daily inflow with artificial neural network using wavelet transform at Chungju Dam." *Journal of Korea Water Resources Association*, KWRA, Vol. 45, No. 12, pp. 1321-1330.
- Safavian, L. S., Kinsner, W., and Turanli, H. (2005). "A quantitative comparison of different mother wavelets for characterizing transients in power systems." *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, IEEE, Saskatoon, Canada, pp. 1461-1464.
- Schaeffli, B., Maraun, D., and Holschneider, M. (2007). "What drives high flow events in the Swiss Alps? Recent developments in wavelet spectral analysis and their application to hydrology." *Advances in Water Resources*, Vol. 30, No. 12, pp. 2511-2525.
- Schulte, J. A., Najjar, R. G., and Li, M. (2016). "The influence of climate modes on streamflow in the Mid-Atlantic region of the United States." *Journal of Hydrology: Regional Studies*, Vol. 5, pp. 80-99.
- Smith, L. C., Turcotte, D. L., and Isacks, B. L. (1998). "Stream flow characterization and feature detection using a discrete wavelet transform." *Hydrological processes*, Vol. 12, No. 2, pp. 233-249.
- Tang, B., Liu, W., and Song, T. (2010). "Wind turbine fault diagnosis based on Morlet wavelet transformation and Wigner-Ville distribution." *Renewable Energy*, Vol. 35, No. 12, pp. 2862-2866.
- Thompson, D. W., and Wallace, J. M. (1998). "The Arctic Oscillation signature in the wintertime geopotential Height and temperature fields." *Geophysical Research Letters*, Vol. 25, No. 9, pp. 1297-1300.
- Torrence, C., and Compo, G. P. (1998). "A practical guide to wavelet analysis." *Bulletin of the American Meteorological society*, Vol. 79, No. 1, pp. 61-78.
- Troup, A. J. (1965). "The 'southern oscillation'." *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 91, No. 390, pp. 490-506.
- Walker, G. T. (1932). "World Weather V." *Memoirs of the Royal Meteorological Society*, Vol. 4, pp. 53-84.
- Wang, S. Y., Liu, X., Yianni, J., Aziz, T. Z., and Stein, J. F. (2004). "Extracting burst and tonic components from surface electromyograms in dystonia using adaptive wavelet shrinkage." *Journal of neuroscience methods*, Vol. 139, No. 2, pp. 177-184.
- Zhao, G., Jiang, D., Diao, J., and Qian, L. (2004). "Application of wavelet time-frequency analysis on fault diagnosis for steam turbine." *5th International Conference of Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques*, CETIM, Senlis, France.